On spin models and triply regular association schemes

AUTHOR(S):

Jaeger, Francois

数理解析研究所講究録
第 849 巻 1993 年 33-39

On spin models and triply regular association schemes

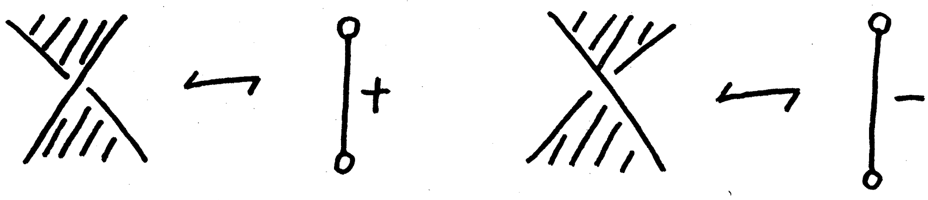
François Jaeger (IMAG Grenoble) 述
生田卓也、川越謙一（九大・理）記

1 Introduction

$G=(V,E)$ を頂点の集合 V 、辺の集合 E とする向きのついていない有限グラフで、多重辺やループをもってもよいとする。E から $\mathbf{C}$ 上の $n\times n$ 対称行列への写像 W を weight function という。また、V から $\{1,\ldots,n\}$ への写像を state という。state σ が与えられた時、頂点 u と v を端点にもつ辺 e に複素数 $W_e(\sigma(u),\sigma(v))$ を対応させる。そこで全ての辺に関する積を $<G|\sigma>$ とかく。この時、(G,W) の partition function Z を次で定める。

$$Z(G,W)=\sum_{\sigma}<G|\sigma>$$

例 1 (spin model) link の diagram L から signed graph $G(L)$ を次のように構成する。
（1）link の diagram から得られる各領域をチェッカー盤の様に塗る。この時、有界でない領域は白と決めておく。
（2）黒い領域に頂点、交点に符号付き辺を下図の様に対応させる。



辺の符号に応じて weight function W_+,W_- を 2 つ用意する。W_+,W_- が次の条件を満たす時、3 つ組 (X, W_+, W_-) を spin model という。

(0) $W_+(\alpha,\beta) = W_+(\beta,\alpha), W_-(\alpha,\beta) = W_-(\beta,\alpha)$

(1) $W_+(\alpha,\beta)W_-(\alpha,\beta) = 1$

(2) $\sum_x W_+(\alpha,x)W_-(x,\beta) = n\delta(\alpha,\beta)$

(3) $\sum_x W_+(\alpha,x)W_+(\beta,x)W_-(\gamma,x) = \sqrt{n}W_+(\alpha,\beta)W_-(\beta,\gamma)W_-(\gamma,\alpha)$

但し、α,β,γ は $\{1,\ldots,n\}$ の任意の元、δ はクロネッカーのデルタとする。この時、$(\frac{1}{\sqrt{n}})^{|V|}Z(G(L),W)$ は link L の不変量となる。(Jones)

2 Association schemes

定義 2 X を $|X| = n$ の有限集合、R_i $(i = 0,\cdots,d)$ を $X\times X$ の部分集合とする。この時、$\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0,\cdots,d})$ が (symmetric) association scheme with classes d とは次の 4 つの条件を満足するときをいう。

(i) $R_0 = \{(x,x)|x\in X\}$

(ii) $R_0 \cup R_1 \cup \cdots \cup R_d = X\times X, \quad R_i\cap R_j = \emptyset \quad (i\neq j)$

(iii) $R_i^T = \{(y,x)|(x,y)\in R_i\} = R_i$

(iv) 任意の $(x,y)\in R_k$ に対し、$\{z\in X|(x,z)\in R_i, (z,y)\in R_j\}$ の個数は i,j,k のみによる。この個数を p_{ij}^k と書く。

各 R_i に対し、0 又は 1 を成分にもつ $n\times n$ 行列 A_i を次のようにして対応させる。もし $(x,y)\in R_i$ ならば $A_i(x,y) = 1$、$(x,y)\notin R_i$ ならば $A_i(x,y) = 0$ とする。すると上の条件 (i),…,(iv) は次と同値である。

(i′) $A_0 = I$ (単位行列)

(ii′) $A_0 + A_1 + \cdots + A_d = J := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad A_i\circ A_j = 0 \quad (i\neq j)$

(iii′) $A_i^T = A_i$

(iv′) $A_iA_j = \sum_{i=0}^{d} p_{ij}^k A_k$

但し、$A \circ B = (a_{ij}) \circ (b_{ij}) := (a_{ij} b_{ij})$ と定義し、この積を Hadamard 積という。$\mathbf{C}$ 上の代数 $\mathcal{A} = < A_0, A_1, \cdots, A_d >$ を association scheme $\mathcal{X}$ の Bose-Mesner algebra という。$\mathcal{A}$ は普通の行列の積と Hadamard 積の 2 つの積について閉じている。以後 weight function W により定まる行列 W_e は $\mathcal{A}$ に属すると仮定する。即ち、

$$W_e = \sum_{i=0}^{d} t_i^{(e)} A_i$$

ここで G を固定すると $Z_G = Z(G, W)$ は W_e に関する多重線形写像となる。

$$\begin{array}{rcl} Z_G : \mathcal{A} \otimes \cdots \otimes \mathcal{A} & \rightarrow & \mathbf{C} \\ W_{e_1} \otimes \cdots \otimes W_{e_m} & \mapsto & Z(G, W) = (W_{e_1}, \cdots, W_{e_m}) \end{array}$$

特に次のことが成り立つ。

Z 

$= \sum_{\sigma} M(\sigma(v), \sigma(v)) = Tr(M)$

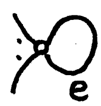
Z 

$= \sum_{\sigma} M(\sigma(u), \sigma(v)) = \tau(M)$

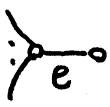
ここで $\theta = \frac{1}{n} Tr$, $\theta^* = \frac{1}{n} \tau$ とおくと $M \in \mathcal{A}$ となる任意の M に対して

$$\begin{array}{l} I \circ M = M \text{の対角成分} = \theta(M) I \\ JM = M \text{の行、又は列の和} = \theta^*(M) J \end{array}$$

となるので次が成り立つ。

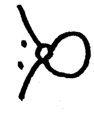
Z 

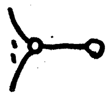
$= \theta(W_e) Z$ 

Z 

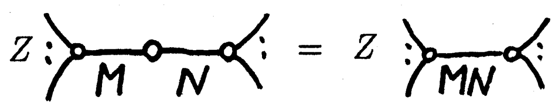
$= \theta^*(W_e) Z$ 

よって

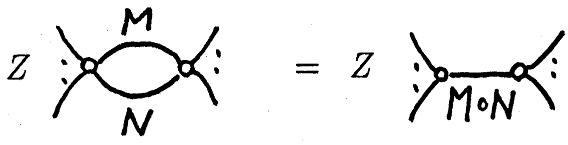
Z  $= Z$  $\circ (id^{\otimes m-1} \otimes \theta)$

Z  $= Z$  $\circ (id^{\otimes m-1} \otimes \theta^*)$

が成り立つ。但し、線形写像のテンソル積の順序に注意する必要があるが、簡単のため順序は無視する。普通の行列の積を $\mu:\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 、Hadamard 積を $\mu^*:\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ とおくと

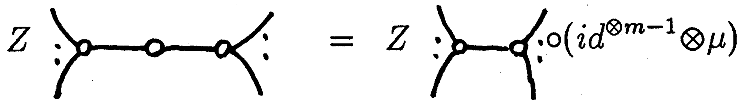


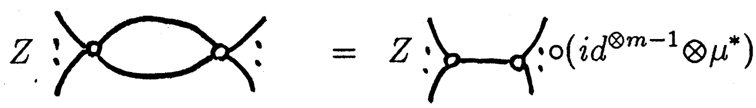
$$\sum_x M(\alpha,x)N(x,\beta) = \mu(M\otimes N)(\alpha,\beta)$$



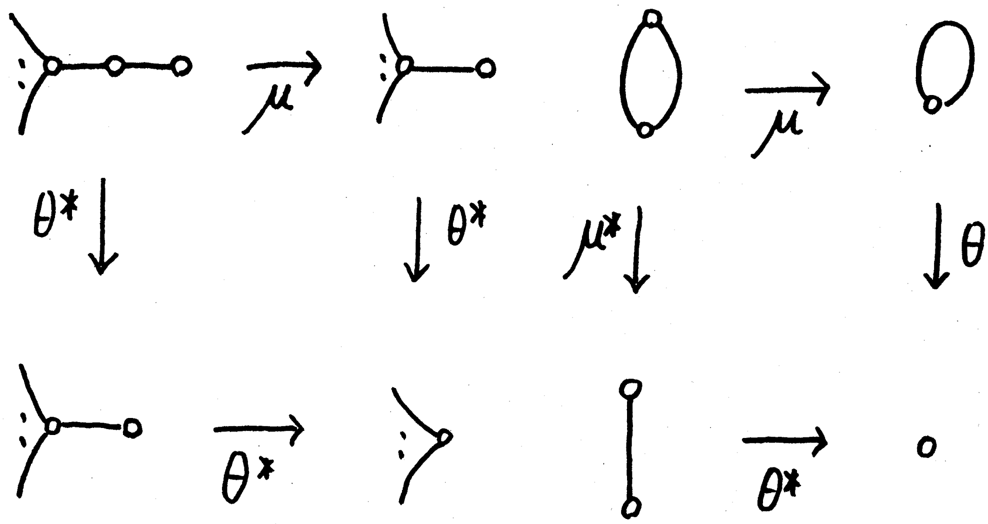
$$M(\alpha,\beta)\circ N(\alpha,\beta) = \mu^*(M\otimes N)(\alpha,\beta)$$

より次が成り立つ。





上のことより下図は可換となる。

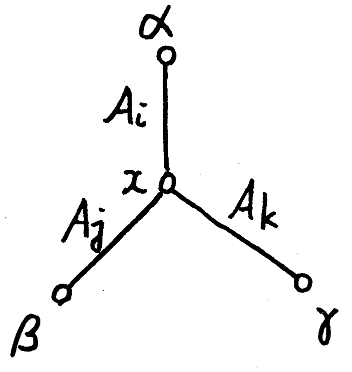


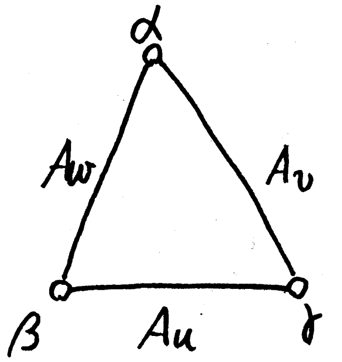
φ を基底 $X = \{1, \cdots, n\}$ をもつベクトル空間とする。2つの写像 $\pi, \pi^* : \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \varphi\otimes\varphi\otimes\varphi$ を次で定義する。

$$\pi(A\otimes B\otimes C) := \sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{x} A(\alpha, x)B(\beta, x)C(\gamma, x)\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$$
$$\pi^*(A\otimes B\otimes C) := \sum_{\alpha,\beta,\gamma} A(\beta, \gamma)B(\gamma, \alpha)C(\alpha, \beta)\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$$

定義 3 association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{i=0,\cdots,d})$ が triply regular とは任意の i, j, k, u, v, w に対し次のような定数 $K_{ijk,uvw}$ が存在することである。

> $(\alpha, \beta) \in R_w, (\beta, \gamma) \in R_u, (\gamma, \alpha) \in R_v$ となる任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対し
> $K_{ijk,uvw} = |\{x \in X | (\alpha, x) \in R_i, (\beta, x) \in R_j (\gamma, x) \in R_k\}|$





ここで $\mathcal{A}$ が triply regular とすると

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{x} A_i(\alpha, x)A_j(\beta, x)A_k(\gamma, x)\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$$
$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{u,v,w} A_u(\beta, \gamma)A_v(\gamma, \alpha)A_w(\alpha, \beta)K_{ijk,uvw}\alpha\otimes\beta\otimes\gamma$$

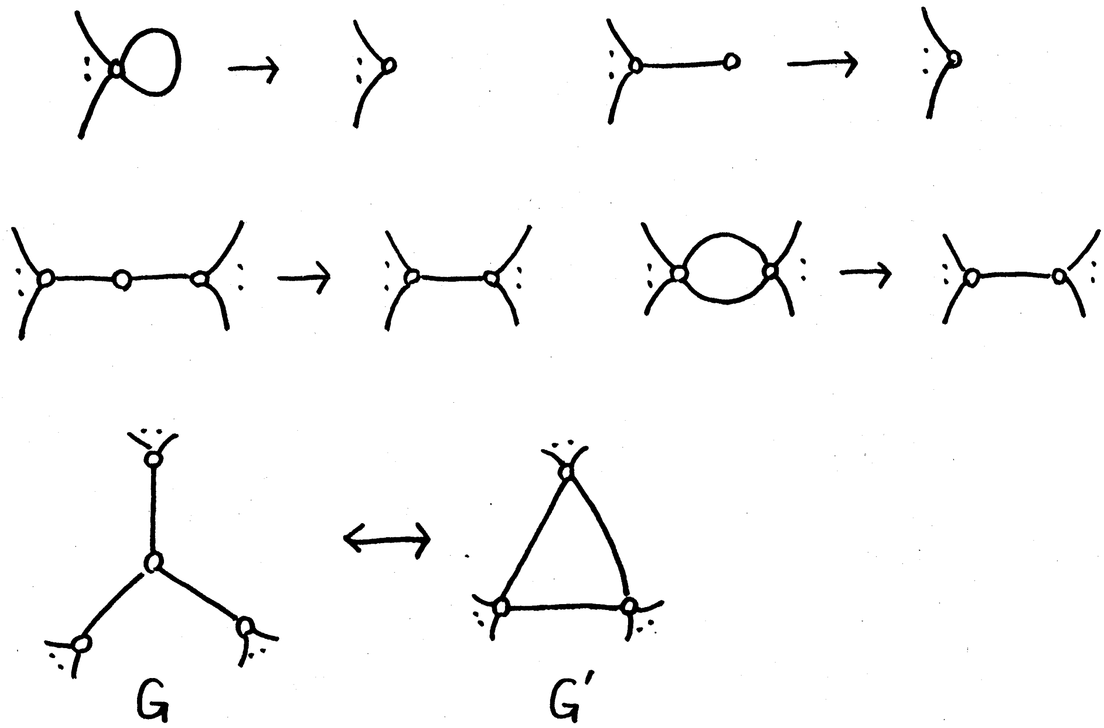
となるので次が成り立つ。

$$\begin{aligned}\pi(A_i\otimes A_j\otimes A_k) &= \sum_{u,v,w} K_{ijk,uvw}\pi^*(A_u\otimes A_v\otimes A_w) \\ &= \pi^*(\sum_{u,v,w} K_{ijk,uvw}A_u\otimes A_v\otimes A_w) \\ &= \pi^*(K(A_u\otimes A_v\otimes A_w)\end{aligned}$$

但し、$K : \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A} \to \mathcal{A}\otimes\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}$ は線形写像。この逆も成り立つので次の命題を得る。

命題 4 $\mathcal{A}$ が triply regular であるための必要十分条件は $\pi = \pi^* \circ K$ を満たす線形写像 $K : \mathcal{A}^{\otimes 3} \to \mathcal{A}^{\otimes 3}$ が存在することである。

定理 5 (Epifanov, Grünbaum, Truemper) 任意の平面グラフは次の 5 つの操作で 1 点へ移る。



この定理を用いて Z_G を帰納的に計算するためには $Z_{G'} = Z_G \circ (K^* \otimes id)$ となる写像 $K^* : \mathcal{A}^{\otimes 3} \to \mathcal{A}^{\otimes 3}$ が必要となる。そのためには $Im\pi = Im\pi^*$ であればよい。

定義 6 $\mathcal{A}$ が exactly triply regolar とは $Im\pi = Im\pi^*$ が成立する時にいう。

$\mathcal{A}$ が triply regular ならば常に $Im\pi \subseteq Im\pi^*$ が成り立つことに注意。

定理 7 G を平面グラフ、$\mathcal{A}$ を *exactly triply regular* とする。この時、Z_G は *extended* $\Delta - Y$ *transformation* により計算可能である。

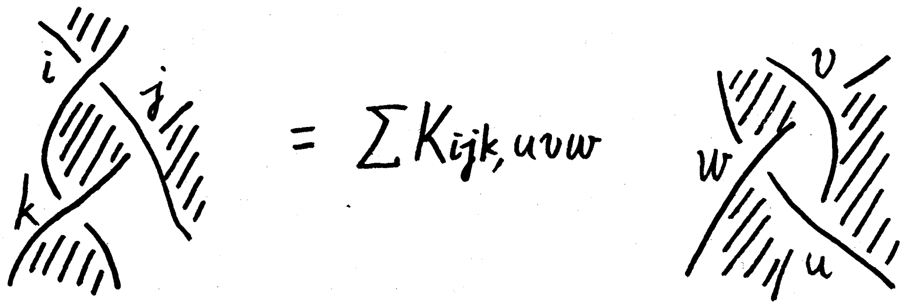
系 8 この時、Z_G は $\mathcal{A}$ の parameter $(n, \theta, \theta^*, \mu, \mu^*, K, K^*)$ のみによる。

3 examples and applications

例 9 strongly regular な subconstituents をもつ strongly regular graph は triply regular 。

例 10 [3] において link の不変量の構成の時に用いられる distance regular graph は triply regular 。

応用 11 $\mathcal{A}$ を exactly triply regular 、$W_+, W_- \in \mathcal{A}$ を link の spin model とする。この時、extended $\Delta - Y$ transformation を用いて link の不変量は計算できる。例えば extended $\Delta - Y$ transformation を diagram 表示すると下図のようになる。



参考文献

[1] E.Bannai and T.Ito, Algebraic Combinatorics I:Association Schemes, Benjamin/Cummings, Menlo, CA, 1984.

[2] V.F.R.Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pacific. J. Math., **137**(1989), 311-334.

[3] K.Nomura, Spin models constructed from Hadamard matrices, preprint.